学校编码：10384　　　　　　　　　　分类号＿＿＿＿ 密级＿＿＿＿
学　　号：19020060153153　　　　　　　UDC＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

博 士 学 位 论 文

关于弱紧集与超弱紧集的一些新特征

On Some New Characterizations of Weakly Compact Sets and Super Weakly Compact Sets

罗 正 华

指 导 教 师： 程立新 教 授
专 业 名 称： 基 础 数 学
论文提交日期： 2010 年 5 月
论文答辩日期： 2010 年 5 月
学位授予日期： 2010 年 　月

答辩委员会主席：＿＿＿＿＿＿
评 阅 人：＿＿＿＿＿＿

2010 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于

（　　）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘　要

本文致力弱紧集、超弱紧集的特征研究。我们利用广义的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 定理以及广义的 Gâteaux 可微性定理证明了“ Banach 空间的有界闭凸集是弱紧的当且仅当其能仿射一致嵌入进某个自反空间”、“ Banach 空间的有界闭凸集能 Lipschitz 嵌入进自反空间当且仅当其闭线性包本身就是自反子空间” (第二章)；利用对次微分、Fréchet 可微、w^*- 强暴露点以及 Fréchet 导数等的讨论证明了 “ Banach 空间 X 的有界子集 K 是相对弱紧的当且仅当在 X^* 上存在 w^*-l.s.c. 半范 q, 使得：(i) q 在其支撑集上的每个内点处 Fréchet 可微；(ii) 存在 $\lambda > 0,\ s.t.\ \lambda\|x^*\|^* \geq q(x^*) \geq \sigma_K(x^*),\ \forall x^* \in X^*.$ ” (第三章)；利用集合的弱紧性和其中序列收敛性关系的讨论，结合下卷积等方法，证明了“ Banach 空间 X 的有界闭凸子集 (相应地，可分有界闭凸子集) C 是弱紧的当且仅当 X 上存在等价的范数，其在 C 上是 w2R (相应地，2R) 的” (第四章)；利用超弱紧集版的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 定理和超弱紧集的一致凸函数特征给出了超弱紧集一个新的特征 (第五章)。

关键词：弱紧集　自反空间　WCG 空间　超弱紧集

Abstract

This paper is aimed to the research of characterizations of the weakly compact sets and the super-weakly compact sets. Applying a generalized Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński's theorem and a generalized Gâteaux differentiability theorem for Lipschitz mappings, we prove first that "a bounded closed convex subset C of a Banach space X is weakly compact if and only if C can be affinely uniformly embedded into some reflexive Banach space" and "C can be Lipschitz embedded into a reflexive Banach space if and only if $\overline{spanC}$ itself is a reflexive space" (Chapter 2); then we show that "a bounded subset K of the space X is relatively weakly compact if and only if there exists a w^*-l.s.c. seminorm q on X^* with $\lambda\|\cdot\|^* \geq q \geq \sigma_K$ for some $\lambda > 0$, such that q is Fréchet differentiable at every interior point of the support set of q" (Chapter 3); we verify that "a bounded closed convex (respectively, separable bounded closed convex) subset C of Banach spaces X is weakly compact if and only if there exists an equivalent norm which is w2R (repectively, 2R) on C" (Chapter 4); finally making use of a "super-weakly compact" version of the Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński's theorem and a characterization in terms of uniformly convex functions of super-weakly compact sets, we give a new characterization of super-weakly compact sets (Chapter 5).

Keywords: weakly compact sets; reflexive spaces; WCG spaces; super-weakly compactly sets

目　录

Table of Contents

第一章 绪 论

§1.1 弱紧集研究发展回顾

在泛函分析的理论以及应用中，所研究的问题往往都是建立在无穷维 Banach 空间的框架之上的，这就使得有限维空间中的有界集不再是（相对）紧集，同时也使得极为重要的概念 – 集合的 “紧性” 条件的假设变得十分苛刻甚至失去了意义，而取而代之的往往是 “弱紧性”。正是因为集合 “弱紧性” 概念在泛函分析中的重要性，使得人们对集合 “弱紧性” 的研究持续了 80 多年而经久不衰。这期间关于弱紧集的研究取得许多重要的成果，比如著名的 James 定理告诉我们， Banach 空间 X 中的有界闭集 C 是弱紧的当且仅当每个连续线性泛函都在 C 上达到最大值； Emberlein-$\breve{S}$mulian 定理指出 Banach 空间中的集合是弱紧的当且仅当其是弱序列紧的，也当且仅当其是弱可数紧的； Krein-$\breve{S}$mulian 定理则说明 Banach 空间的弱紧集的闭凸包是弱紧的；此外还有大家所熟知的 Choquet 积分表示定理、 Orlicz-Pettis 定理、 Davis-Fiegel-Johnson-Pelzýnski 定理、 Rainwater 定理、 Eberlein-Grothendieck 定理、 Krein 定理、 Krein-Milman 定理、以及 Dunford-Pettis 的关于空间 L^1 中的弱紧集的判定定理等等 (可见 [1], [5], [6], [33] 等)。由此可见关于弱紧集的研究成果是十分丰富且意义深远的，因此数学家们一直在努力地寻找弱紧集的各种各样的特征。本文的主要内容是通过弱紧集嵌入自反空间、弱紧集的赋光滑及凸性范数等角度来刻划弱紧集的特征。

• Banach 空间的局部嵌入

Banach 空间嵌入问题，它包括 Banach 空间插值、局部理论、同胚和再赋范理论、映射可微性、等距延拓和逼近、“万有” 空间、Orlicz 空间构造问题等等, 自泛函分析诞生, 就受到人们高度关注, 构成了泛函分析中最本质最深刻的组成部分, 同时也是与其他数学分支结合、应用最广泛的研究领域之一。一般而言, 经典 “嵌入” 是指 (1) 将一般度量空间等距或同胚地映入某个 Banach 空间； (2) 将某一个或某一类 Banach 空间 (线性、 Lipschitz 或连续) 同胚地映入某个 (类) 性质更好的 Banach 空间的子空间；或者 (3) 将一个 Banach 空间某个具有良好拓扑性质和几何性质的集合 “线性” 同胚地映入某个同样具有良好性质的空间；以及 (4) 从某一集合出发构造某类具有我们期望性质的 Banach 空间。上述这些方面的研究及进展可参考 [15], [33], [38], [59-69]

等。这其中局部嵌入问题早在 70 年代就引起了人们的关注，“局部嵌入”就是期望把 Banach 空间具有某些良好性质 (例如，弱紧性、 RNP 、不具有有限树性等) 的子集，“线性”地嵌入具有同样良好性质 (如，相应的自反、 RNP 、超自反) 的空间。其中最具代表性的成果应归于 1974 年发表的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 弱嵌入定理 ([33]) ，该定理指出 Banach 空间的弱紧集可 (仿射) 同胚于自反空间的弱紧集。而在 1976 年， Y.Benyamini 和 T.Starbird([34]) 举了一个例子说明， Banach 空间的弱紧子集不一定能拓扑同胚于 Hilbert 空间的弱紧子集，并且证明了： Banach 空间的弱紧子集能嵌入到超自反空间当且仅当其能嵌入到 Hilbert 空间中。

上述的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 弱嵌入定理虽然在算子分解、WCG 空间的刻划等问题上起着重要作用，但由于没能从“弱”到“强”，三十多年来，“局部嵌入问题”的进展没有取得理想的效果。最近程立新等 ([37]) 证明了 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 弱嵌入定理也是强 - 强嵌入的。本文的第二章利用他们所建立的广义的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 定理 ([37]) 以及广义的 Gâteaux 可微性定理 ([2]) 证明了弱紧集的一致仿射嵌入进自反空间特征以及集合 Lipschitz 嵌入进自反空间的特征 (即文中定理 2.2.7) 。

• 弱紧集与再赋光滑范数

除了自反空间，WCG 空间是另一个与弱紧集密切相关的概念。WCG 空间是由 D. Amir 和 J. Lindenstrauss([7]) 于 1968 年首先引入的，它指的是等于某个弱紧集的线性闭包的 Banach 空间。自反空间、 WCG 空间的拓扑及再赋范性质的研究引起了人们极大的兴趣。D. Amir 和 J. Lindenstrauss([7]) 证明了：对每个 WCG 空间 X ，都存在某个指标集 Γ 及 1-1 的连续线性算子 $T: X \to c_0(\Gamma)$ 。 S. Troyanski 的再赋范定理 ([8]) 告诉我们，每个 WCG 空间上都存在等价的局部一致凸范数。而将 Troyanski 再赋范定理与 Asplund 平均技巧 ([9]) 结合在一起知：自反空间中都存在等价范数，使得其及其共轭范数都是局部一致凸的，因此也都是 Fréchet 可微的。

进一步，弱紧集、 WCG 空间与范数的光滑性之间的联系同样引起了人们的重视，这方面相关的结果可见 [10-13], [18-20], [21], [30-31] 等。需要强调的是，在这方面 Fabian, Godefroy, Montesions 和 Zizler 等人作了重要的工作。他们利用 M- 光滑范数、 ϵ-M- 光滑范数、 σ-LUR 、 σ-Fréchet 光滑以及 σ-Asplund 生成空间等一些更加精细的概念给出了集合 M 是弱紧集的一些特征，同时也给出了 WCG 空间及其

子空间的一些的特征。在 [11] 中，他们讨论了范数的 Gâteaux 光滑性和集合的弱紧性的关系，并且利用逐点下半连续的 M- 光滑的范数以及 Projectional Resolutions of the Identity (简记 P.R.I. ，关于 P.R.I. 的内容可参考 [15-17] 等) 给出了集合 M 是弱紧的两个光滑性特征。本文的第三章利用凸分析的工具给出了利用共轭空间中 Fréchet 光滑半范数来刻划弱紧集的特征 (即文中定理 3.2.7) 。

• 弱紧集与再赋凸性范数

泛函分析中另一个经典问题是寻找 Banach 空间自反性的几何特征。这方面最早的结果是 D. P. Milman 于 1938 年 ([22]) 和 B. J. Pettis 于 1939 年 ([23]) 各自独立证明的定理：“一致凸 Banach 空间是自反的。” 这个定理揭示出 Banach 空间的几何性质决定了它的拓扑性质。另一方面， M.M.Day 于 1941 年 ([24]) 发表的文章 “自反空间不必同胚于一致凸空间” 说明了，即使在再赋等价范数的意义下自反性并不意味着一致凸性。从中可知一致凸性是强于自反性的，于是许多年来泛函分析学家们一直思考着这样的问题：是否存在某种比一致凸性更弱些的几何性质能与自反性等价。1971 年， V.D.Milman 在 [25] 中引入了 2-rotund (2R) 及 weakly 2-rotund (w2R) 这两种几何性质 (也可见 [26]) ，即： Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中， $\|\cdot\|$ 称为是 2R 的 (相应地， w2R 的), 如果有界序列 $\{x_n\} \subset X$, 满足

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|\frac{x_m+x_n}{2}\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|.$$

则 $\{x_n\}$ 收敛 (相应地， w- 收敛) 。并且他认为 (没有证明) 可分自反空间正是可赋等价 w2R 范数的空间，同时他还问到：“具有局部一致凸范数 (此条件根据 [8] 中定理 “自反空间可赋等价局部一致凸范数” 可省去) 的自反空间是否可赋等价 2R 范数？” 当 Banach 空间是可分时， E. Odell 和 T. Schlumprecht 于 1998 年 ([4]) 对这一问题给出了肯定的回答，即可分 Banach 空间 X 是自反的当且仅当 X 上存在等价的 2R 范数。对于一般的不可分 Banach 空间，在 2004 年 P.Hajék 和 M.Johanis ([3]) 通过 $c_0(\Gamma)$ 上 Day 范数的研究证明了： Banach 空间 X 是自反的当且仅当 X 上存在等价的 w2R 范数。而对于不可分自反的 Banach 空间，其上是否存在等价的 2R 范数目前尚不得知。对具有 2R 范数性质空间的研究可回溯到上个世纪 50 年代，在 [27] 中，对 2R 性质与其它光滑性、凸性之间的关系作了研究讨论，关于这方面完整的研究发展可见 [15] 。

为了从自反性到弱紧性， Fabian 等在 [21] 中将上述的 2R 范数的概念推广如下：设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，有界集 $M \subset X$, 称 $\|\cdot\|$ 是对偶 M-2R 的，如果序列 $\{f_n\} \subset B_{X^*}$, 满足 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|f_n + f_m\| = 2$, 则 $\{f_n\}$ 在 M 上一致收敛于某个 $f \in B_{X^*}$ 。同时他们证明了：可分 Banach 空间 X 的子集 M 是相对弱紧的当且仅当 X 上存在等价的对偶 M-2R 范数。本文的第四章利用 2R, w2R 范数的局部化定义 (文中定义 4.1.4)，给出了弱紧集的 2R (w2R) 范数特征 (文中定理 4.2.2 和 4.2.3)。

• WCG 空间的子空间

正如上文所说的， WCG 空间与弱紧集的概念是密切相关的。因此人们建立了 WCG 空间的各种特征。比如 Banach 空间 X 是 WCG 的当且仅当存在自反空间 Y, 及 1-1 的连续线性算子 $T: Y \to X$, 满足 $T[Y]$ 在 X 中稠密以及 $T^*[X^*]$ 在 Y^* 中稠密；也当且仅当存在非空指标集 Γ, 及 1-1 、w^*-w 连续的有界线性算子 $T: X^* \to c_0[\Gamma]$ 。更多关于 WCG 空间的内容可参考 [7], [13], [16-17], [19-20], [35-36], [56] 等。

另一方面， WCG 空间的子空间不一定是 WCG 的 (可见 [16],[70])，因此人们也建立 WCG 空间子空间的各种特征。例如： Banach 空间是 WCG 空间的子空间当且仅当 (B_{X^*}, w^*) 是 Eberlein 紧的 ([36])。近期 Fabian 等人在这方面作了大量的工作：在 [10] 中，他们通过一致 Gâteaux 光滑性及具有附加属性的完全集的存在性给出了 WCG 空间及它们子空间的特征；在 [18] 中，他们通过 ϵ- 弱紧集的概念给出了 WCG 空间子空间的 ϵ- 弱紧集的覆盖特征，即 Banach 空间 X 是某个 WCG 空间的子空间当且仅当对 $\forall \epsilon > 0$, X 能被可数多个有界对称凸的 ϵ- 弱紧集覆盖；在 [12] 中，他们利用 σ-Asplund 生成空间、 σ-LUR 、 σ-w^* Kadec 性质以及 σ-Fréchet 光滑这些更加精细的概念给出 WCG 空间子空间的新特征。特别地，对于 [12] 中的结论：若 X 是某个 WCG 空间的子空间，则 X 上存在等价的范数，使得其共轭范数是 σ-LUR 的 ([12] 定理 1)，本文在第三章第三节中给出该结论的一个不同的证明方法。

§1.2 超弱紧集

各种 Banach 空间的再赋范特征不仅重要并且在应用方面也是极有用的。众所周知，自上世纪 70 年代初 James 引入超自反空间概念以来，超自反空间的研究已取得丰富成果 (可见 [32], [38-43] 等)。其中具有代表意义的是， 1972 年 P. Enflo ([28]) 证明了超自反空间可视作一致可凸化空间的特征，有时也称为 Enflo 再赋范定理。

之后于 1975 年， G. Piser ([29]) 利用“鞅”这一工具还证明了可一致凸化的空间存在具有指数型模的 (一致凸) 等价范数。 Enflo-Piser 对超自反空间的再赋范结果被认为是再赋范理论中最为经典和深刻的结果，是再赋范理论的里程碑。另一方面，James([39]) 利用有限表示给出了超自反空间的有限树特征； Piser ([29]) 、 Brunel-Sucheston ([44]) 指出了超自反与超 Radon-Nikodým 性质、超 Krein-Milman 性质及超 Banach-Saks 性质也均是等价的；不需要有限表示的概念， James 和 Schăffer ([42]) 给出了超自反空间一个“围长 (girth) ”的几何特征；程立新等 ([45]) 利用连续一致凸函数以及 Cepedello ([46]) 利用 Δ- 凸函数给出了超自反空间的凸函数特征。最近，程立新利用其所开创的从研究 Banach 空间单位球面的球覆盖性质出发研究 Banach 空间几何性质的方法，给出了超自反空间的一个球覆盖特征 (可见 [47], [48]) 。

另一方面，在许多情况下整个空间的一致凸性或超自反性不是自然的条件，而仅仅需要局部化的条件。例如，Kirk ([71]) 非扩张映射的不动点定理说明只要一个有界闭凸集 C 具有正规结构和弱紧性便可保证其上的非扩张映射具有不动点。对比弱紧集可视作自反空间概念的局部化和推广，最近程立新和程庆进利用单形和推广的有限表示给出了超弱紧集的概念 ([51])(具体定义可见本文 5.1 节) 。他们证明了超弱紧集性正是一致凸化空间的局部版特征，同时证明了 Banach 空间的每个超弱紧凸集均可强 - 强一致嵌入进某个自反且相对一致凸空间 (可见 [51]) 。超弱紧集作为超自反空间概念的推广和局部化，其本身的研究具有独立意义。本文第五章利用超弱紧集版的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 定理给出了超弱紧集的广义再赋一致 Fréchet 光滑范数的特征。

§1.3 本文的主要内容

本文通过 Banach 空间的局部嵌入、 Banach 空间的再赋光滑、凸性范数等角度给出了弱紧集一些不同的特征。同时对超弱紧集也给出了一个特征刻划。全文共分五章：

第一章 简要回顾了 Banach 空间的嵌入、 Banach 空间的局部嵌入以及自反空间、 WCG 空间、弱紧集的再赋范的发展历程；同时回顾了超自反空间的再赋范问题，并且介绍了超自反空间的局部化概念－超弱紧集。

第二章 利用广义的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 定理以及广义的 Gâteaux 可

微性定理给出了弱紧集的一致仿射嵌入进自反空间特征以及集合 Lipschitz 嵌入进自反空间的特征。

第三章　通过对次微分、 Fréchet 可微性、 w^*- 强暴露点以及 Fréchet 导数等的讨论，利用共轭空间中的 w^*-l.s.c. 且 Fréchet 光滑的半范给出弱紧集的一个特征。同时对 WCG 空间的子空间作了些讨论。

第四章　利用集合的弱紧性和其中序列的收敛性关系的讨论，结合下卷积等方法，给出了弱紧集的再赋 2R (w2R) 范数特征。

第五章　利用超弱紧集版的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 定理和超弱紧集的一致凸函数特征给出了超弱紧集一个新的特征。

第二章 弱紧集嵌入自反空间

本章我们利用程立新等所建立的广义的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 定理 (文中定理 2.1.2) 以及广义的 Gâteaux 可微性定理 (文中定理 2.2.6) 证明了弱紧集的一致仿射嵌入进自反空间特征以及集合 Lipschitz 嵌入进自反空间的特征 (即文中定理 2.2.7) 。本章共分二节，第一节回顾了广义的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 定理及其证明；第二节通过对集合的弱紧性与其中序列的收敛性关系的讨论，结合利用广义的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 定理以及广义的 Gâteaux 可微性定理建立了弱紧集的一个新特征以及集合 Lipschitz 嵌入进自反空间的特征。

§2.1　广义的 Davis-Fiegel-Johnson-Pelzýnski 定理

本节中, 我们将经典的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 定理进行了更强意义上的推广。

定义 2.1.1. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 *Banach* 空间， $U \subset X$ 为以 *0* 点为内点的有界对称凸子集。令

$$p(x) = \inf\{t > 0 : x \in tU\}, \forall x \in X.$$

称 p 为由 U 所生成的 *Minkowski* 泛函，易证 p 是 X 上等价的范数。

更多关于 Minkowski 泛函的内容，可参考 [14],[52] 等。

以下是程立新等 [37] 所建立的广义的 Davis-Fiegel-Johnson-Pelzýnski 定理。为了完整起见，我们给出该定理的证明。

定理 2.1.2. [37] 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 *Banach* 空间， B 是其闭单位球， K 是 X 的有界对称凸子集。对 $\forall n \in \mathbb{N}$，令 $U_n = 2^n K + 2^{-n} B$，记 $\|\cdot\|_n$ 为 U_n 所生成的 *Minkowski* 泛函，定义 $|x| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2)^{\frac{1}{2}}, \forall x \in X$; 令 $Y = \{x \in X : |x| < \infty\}$。记 C 为 $(Y, |\cdot|)$ 的闭单位球以及 $j : Y \to X$ 为自然嵌入映射，即 $j(x) = x, \forall x \in Y$。则：

(i) $K \subset C$;

(ii) $(Y, |\cdot|)$ 是 *Banach* 空间且 j 是连续的；

(iii) j^{-1} 在 K 上是一致 $\|\cdot\|$- 连续的；

(iv) $j^{**}: Y^{**} \to X^{**}$ 是 *1-1* 的且 $Y = j^{**-1}(X)$*;*

(v) $dens(Y, |\cdot|) = dens(Y, \|\cdot\|)$，这样 $(Y, |\cdot|)$ 是可分的当且仅当 $(Y, \|\cdot\|)$ 是可分的；

(vi)$(Y, |\cdot|)$ 是自反的当且仅当 K 是 X 的相对弱紧集.

证明： 定理中的 (i),(ii),(iv),(vi) 即经典的 Davis-Fiegel-Johnson-Pelzýnski 定理 [33]。下面证明 (iii) 和 (v)。

(iii) 对每个 $m \in \mathbb{N}$, 令

$$P_m(x) = (\sum_{n=1}^{m} \|x\|_n^2)^{\frac{1}{2}}, \forall x \in X.$$

由于每个 $\|\cdot\|_n$ 是 X 上等价范数，于是每个 $\|\cdot\|_n$ 在 X 上是一致 $\|\cdot\|$- 连续的，所以 P_m 在 X 也是一致 $\|\cdot\|$- 连续的。同时，由 Minkowski 泛函的定义可知，对每个 $n \in \mathbb{N}, x \in K$, 有 $\|x\|_n \leq 2^{-n}$。这意味着当 $m \to \infty$ 时，在 K 上 P_m 一致收敛于 $|\cdot|$。因此，易证在 K 上 $|\cdot|$ 是一致 $\|\cdot\|$- 连续的。

(v) 由于每个 $\|\cdot\|_n$ 是 X 上等价范数, 所以 $dens(Y, \|\cdot\|_n) = dens(Y, \|\cdot\|), \forall n \in \mathbb{N}$, 设 Z 为 $\{(Y, \|\cdot\|_n), n \in \mathbb{N}\}$ 的 l_2- 直和，即

$$Z = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus (Y, \|\cdot\|_n))_{l_2} = \{(x_n) : x_n \in (Y, \|\cdot\|_n), \forall n \in \mathbb{N}, |(x_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} (\|x\|_n^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.$$

则 $dens(Y, |\cdot|) = dens(Z, |\cdot|) = dens(Y, \|\cdot\|)$. □

§2.2　弱紧集的嵌入自反空间特征

本节中，我们将从集合能否嵌入到自反空间来刻划该集合的弱紧性。首先我们回顾下有关映射、嵌入的一些基本概念。

定义 2.2.1. 设 $(U, d_U), (V, d_V)$ 是两个度量空间， $f : U \to V$ 是一映射。令

$$\omega_f(t) = \sup\{d_v(f(x), f(y)) : x, y \in U, d_U(x, y) \leq t\}, \forall t \geq 0.$$

称 ω_f 为 f 的连续模。若 $\lim_{t\to 0}\omega_f(t)=0$, 则称 f 是一致连续的。令

$$Lip(f)=\sup\{\frac{d_V(f(x),f(y))}{d_U(x,y)}:x,y\in U,x\neq y\}.$$

称 $Lip(f)$ 为 f 的 *Lipschitz* 常数，若 $Lip(f)<\infty$, 则称 f 是 *Lipschitz* 映射。

定义 2.2.2. 设 $(U,d_U),(V,d_V)$ 是两个度量空间， $f:U\to V$ 是一映射。若 f 是 *1-1* 的，并且 f,f^{-1} 都是一致连续的（相应地， *Lipschitz* 的），则称 U 一致同胚（相应地，*Lipschitz* 同胚）于 $f(U)$，而称 U 一致嵌入（相应地，*Lipschitz* 嵌入）进 V 。

更多关于一致连续、 Lipschitz 映射的内容，可参考 [38] 。

以下定理建立了集合的弱紧性与其中序列的收敛性的关系。

定理 2.2.3. 设 C 是 *Banach* 空间 X 的闭凸集，则以下论述等价：

(i) C 是弱紧集；

(ii) 对 $\forall\{x_n\}\subset C$, 存在收敛序列 $\{y_n\}\subset C, s.t.\ y_n\in co\{x_j:j\geq n\},\forall n\in\mathbb{N}$;

(iii) 对 $\forall\{x_n\}\subset C$, 存在弱收敛序列 $\{y_n\}\subset C, s.t.\ y_n\in co\{x_j:j\geq n\},\forall n\in\mathbb{N}$.

证明：(i)⇒(ii)：由 Emberlein-$\breve{S}$mulian 定理知, 对 $\forall\{x_n\}\subset C$, 存在弱收敛子列（不妨仍设为 $\{x_n\}$ ）。再由泛函分析的经典定理知, 存在收敛序列 $\{y_n\}\subset X, s.t.\ y_n\in co\{x_j:j\geq n\},\forall n\in\mathbb{N}$. 因为 C 是凸的，所以 $\{y_n\}\subset C$.

(ii)⇒(iii) 是显然的。

(iii)⇒(i)：要证明 C 是弱紧集, 由 Jame's 弱紧集判定定理只需证明 $\forall x^*\in X^*, x^*$ 在 C 上取到最大值。设 $\sigma_C(x^*)=\sup\{\langle x^*,x\rangle:x\in C\}$ ，则存在 $\{x_n\}\subset C, s.t.$

$$\sigma_C(x^*)-\frac{1}{n}\leq\langle x^*,x_n\rangle\leq\sigma_C(x^*),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

由 (iii) 知存在弱收敛序列 $\{y_n\}\subset C, s.t.\ y_n\in co\{x_j:j\geq n\},\forall n\in\mathbb{N}$. 设 y_n 弱收敛于 $y_0\in C$. 另一方面，对每个 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$\sigma_C(x^*)-\frac{1}{n}\leq\sigma_C(x^*)-\frac{1}{j}\leq\langle x^*,x_j\rangle,\ \forall j\geq n.$$